第六章 测量误差的基本知识

测绘工程教研室
主讲教师：马明舟
2015年04月

本章知识结构

- 第一节 测量误差概论
- 第二节 偶然误差的特性
- 第三节 评定精度的指标
- 第四节 同精度直接平差
- 第五节 观测误差知识的应用

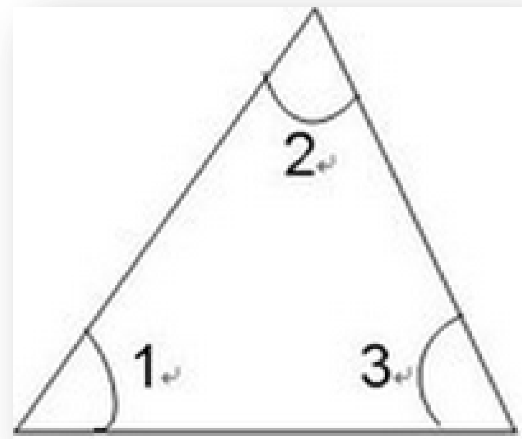
第一节 测量误差的概论

- 一、测量误差 （一）概念

　　对同一个量进行多次观测，尽管观测者按照一定的方法去操作，用较高精度的仪器，同时也认真地工作，可所得各观测值之间总是存在差异。

　　如观测一个三角形的三个内角的水平角度，理论上内角和为180°，但实际的结果却与之有一定的差异。

　　同一个量各观测值之间，以及观测值与其理论值之间的差异，称为测量误差（也称观测误差）。



$\angle 1 = 55°\ 31'24''$
$\angle 2 = 65°\ 27'18''$
$\angle 3 = 59°\ 01'06''$

第一节 测量误差的概论

- 一、测量误差

（二）测量误差中的几个基本名词

1.真值：被观测量的实际数值，用X表示；

2.观测值：被观测量的测算结果，用L表示；

3.真误差：观测值与真值之间的差值，用$\triangle$表示。

$$\Delta = L - X$$

第一节 测量误差的概论

- 一、测量误差

（三）真误差的应用

1.三角形（内角和）闭合差：用W表示

$$W=\left(\beta_1+\beta_2+\beta_3\right)-180^{\circ}$$

2.闭合水准路线的高差闭合差：用f_h表示

$$f_h=\left(h_1+h_2+h_3\right)-0$$

第一节 测量误差的概论

- 二、测量误差产生的原因

1.仪器误差：

测量所用仪器只有一定限度的精密度，仪器检验校正也不可能绝对准确，用这样的仪器进行测量，使观测结果受到相应的影响，这类误差称为仪器误差。

第一节 测量误差的概论

- 二、测量误差产生的原因

2. 人为误差：

　　观测者感觉器官的鉴别能力局限性而产生的误差。如用仪器对中、整平、瞄准、读数等，都是通过人的肉眼的估计和判断，从而使成果带有误差。

　　同时，观测者的技术水平、工作态度也会对观测结果产生不同的影响。

第一节 测量误差的概论

- 二、测量误差产生的原因

3. 外界环境：

观测时所处外界自然环境使得自然环境使观测结果不可避免的带有误差。如温度、风力、大气折光等因素，都会对观测的结果带来影响，而产生误差。

第一节 测量误差的概论

- 二、测量误差产生的原因

观测条件的概念：

与观测过程同时存在的影响因素的综合，包括了：观测人员的操作水平，观测使用仪器的精度和观测时所处外界环境以及测绘所采用的方法，执行的规范等。

测量总是在一定的观测条件下进行的，则产生误差就不可避免。只能是观测条件好时，误差小，观测质量好，亦即精度高。反之，质量差，精度低。

第一节 测量误差的概论

- 三、测量误差的分类

根据误差性质，测量误差可分为系统误差和偶然误差。

（1）系统误差：

在同样测量条件下做一系列观测，如果出现的误差**在数值上、符号上具有规律性变化，或保持不变，**这种测量误差就称为系统误差。

如：钢尺的名义长度30.000m，而实际长度29.990m，每次丈量一个整尺段距离就会多1cm。

系统误差的来源：仪器误差、仪器安置、理论误差、人员误差、外界条件影响等。

第一节 测量误差的概论

- 三、测量误差的分类

根据误差性质，测量误差可分为系统误差和偶然误差。

（1）系统误差：

由于系统误差具有规律性，因此在观测过程中，可以通过对仪器进行检验和校正、一定的观测方法、提高作业人员的熟练程度、限定外业观测条件等手段来抵消系统误差的影响。

第一节 测量误差的概论

- 三、测量误差的分类

根据误差性质，测量误差可分为系统误差和偶然误差。

（2）偶然误差：

在同样观测条件下的测量值序列中，各测量值的测量误差的数值、符号具有不确定性，但又服从一定统计规律的测量误差称为随机误差，测量上叫偶然误差。

例如：水准尺上估读到1mm，是估大还是估小，不可预测，不可确定，纯系偶然。

偶然误差的随机性，使得偶然误差在观测过程中无法被消除或抵消。

1542？
1543？

第一节 测量误差的概论

- 三、测量误差的分类

根据误差性质，测量误差可分为系统误差和偶然误差。

（3）错误（粗差）：

歪曲测量成果或计算出的结果与实际不符，都是错误。产生原因多半是观测者不正确操作，或粗心大意，或过分疲劳等使测出的成果产生错误。

如：把上丝读数当作中丝读数；计算高差时，计算错误等。

错误（粗差）不是误差，它不应出现在观测记过当中，在测量作业中必须有必要的检核，同时也需要测量人员认真的态度！

第二节 偶然误差的特性

- 系统误差可以通过一定的手段抵消或消除；
- 错误（粗差）可以通过必要的检核进行排除；
- 但是，偶然误差不可消除，即便偶然误差很小，也会使得观测值与真值不一致。
- 那么偶然误差有多大？会对观测的结果产生多大影响？这就是测量误差所要研究的关于测量精度的问题。
- 要研究精度，首先就要掌握偶然误差都具有哪些特性。

第二节 偶然误差的特性

- 实例：对某一个三角形的三个内角进行了358组相同条件下的观测，得到358组三角形闭合差，取6″为误差区间，将这些闭合差按正负号由小到大排列，统计出各区间出现的误差个数k，并计算其相对个数k / n（358），k / n称为误差出现在该区间的频率。

误差区间	负误差		正误差		误差绝对值	
	k	k/n	k	k/n	k	k/n
$0^{\circ}\sim6^{\circ}$	45	0.126	46	0.128	91	0.254
$6^{\circ}\sim12^{\circ}$	40	0.112	41	0.115	81	0.226
$12^{\circ}\sim18^{\circ}$	33	0.092	33	0.092	66	0.184
$18^{\circ}\sim24^{\circ}$	23	0.064	21	0.059	44	0.123
$24^{\circ}\sim30^{\circ}$	17	0.047	16	0.045	33	0.092
$30^{\circ}\sim36^{\circ}$	13	0.036	13	0.036	26	0.073
$36^{\circ}\sim42^{\circ}$	6	0.017	5	0.014	11	0.031
$42^{\circ}\sim48^{\circ}$	4	0.011	2	0.006	6	0.017
48° 以上	0	0	0	0	0	0
$\sum$	181	0.505	177	0.495	358	1.000

第二节 偶然误差的特性

- 从下列表格中你可以看出偶然误差具有哪些特性？

误差区间	负误差		正误差		误差绝对值	
	k	k/n	k	k/n	k	k/n
0°～6°	45	0.126	46	0.128	91	0.254
6°～12°	40	0.112	41	0.115	81	0.226
12°～18°	33	0.092	33	0.092	66	0.184
18°～24°	23	0.064	21	0.059	44	0.123
24°～30°	17	0.047	16	0.045	33	0.092
30°～36°	13	0.036	13	0.036	26	0.073
36°～42°	6	0.017	5	0.014	11	0.031
42°～48°	4	0.011	2	0.006	6	0.017
48° 以上	0	0	0	0	0	0
Σ	181	0.505	177	0.495	358	1.000

结论1：有限观测中，在一定的观测条件下，偶然误差的绝对值不会超过一定的限值——有限性

第二节 偶然误差的特性

- 从下列表格中你可以看出偶然误差具有哪些特性？

误差区间	负误差		正误差		误差绝对值	
	k	k/n	k	k/n	k	k/n
0°～6°	45	0.126	46	0.128	91	0.254
6°～12°	40	0.112	41	0.115	81	0.226
12°～18°	33	0.092	33	0.092	66	0.184
18°～24°	23	0.064	21	0.059	44	0.123
24°～30°	17	0.047	16	0.045	33	0.092
30°～36°	13	0.036	13	0.036	26	0.073
36°～42°	6	0.017	5	0.014	11	0.031
42°～48°	4	0.011	2	0.006	6	0.017
48°以上	0	0	0	0	0	0
$\sum$	181	0.505	177	0.495	358	1.000

结论2：绝对值小的误差出现的频率大，绝对值大的误差出现的频率小——密集性

第二节 偶然误差的特性

- 从下列表格中你可以看出偶然误差具有哪些特性？

误差区间	负误差		正误差		误差绝对值	
	k	k/n	k	k/n	k	k/n
0°～6°	45	0.126	46	0.128	91	0.254
6°～12°	40	0.112	41	0.115	81	0.226
12°～18°	33	0.092	33	0.092	66	0.184
18°～24°	23	0.064	21	0.059	44	0.123
24°～30°	17	0.047	16	0.045	33	0.092
30°～36°	13	0.036	13	0.036	26	0.073
36°～42°	6	0.017	5	0.014	11	0.031
42°～48°	4	0.011	2	0.006	6	0.017
48°以上	0	0	0	0	0	0
Σ	181	0.505	177	0.495	358	1.000

特征3：绝对值相等的正、负误差出现的概率大致相等——对称性

第二节 偶然误差的特性

- 从下列表格中你可以看出偶然误差具有哪些特性？

误差区间	负误差		正误差		误差绝对值	
	k	k/n	k	k/n	k	k/n
0°～6°	45	0.126	46	0.128	91	0.254
6°～12°	40	0.112	41	0.115	81	0.226
12°～18°	33	0.092	33	0.092	66	0.184
18°～24°	23	0.064	21	0.059	44	0.123
24°～30°	17	0.047	16	0.045	33	0.092
30°～36°	13	0.036	13	0.036	26	0.073
36°～42°	6	0.017	5	0.014	11	0.031
42°～48°	4	0.011	2	0.006	6	0.017
48°以上	0	0	0	0	0	0
$\sum$	181	0.505	177	0.495	358	1.000

推论：如果当观测次数无限增多时，偶然误差的算术平均值趋近于零——抵偿性

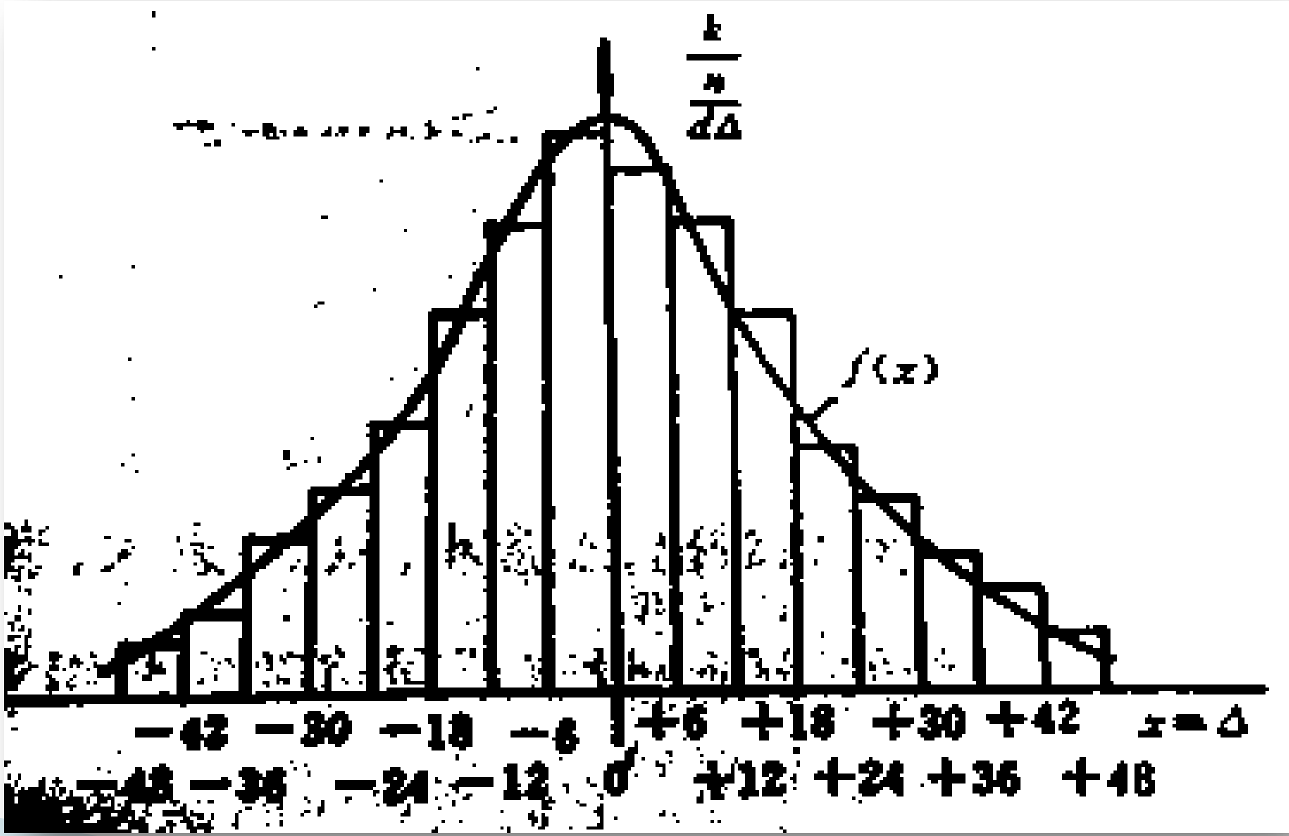
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\Delta_1+\Delta_2+\cdots+\Delta_n}{n}=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{[\Delta]}{n}=0$$

第二节 偶然误差的特性

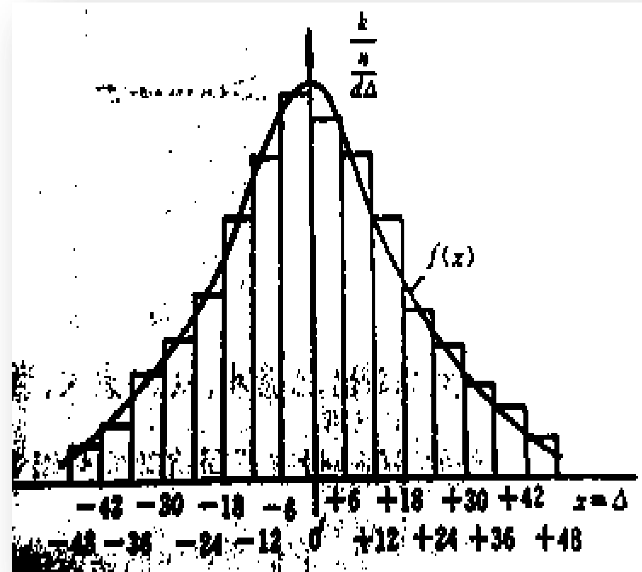
- 当观测次数趋向于无穷（$n \to \infty$），且误差区间足够小时，误差频率的直方图会如何？

天啊！
偶然误差出现的频率服从于正态分布！



第二节 偶然误差的特性

- 偶然误差正态分布的数学方程：



$$y = f(\Delta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-\Delta^2}{2\sigma^2}}$$

- 其中：

（1）$\triangle$：（偶然误差）自变量；

（2）y：因变量，表示偶然误差出现的频率；

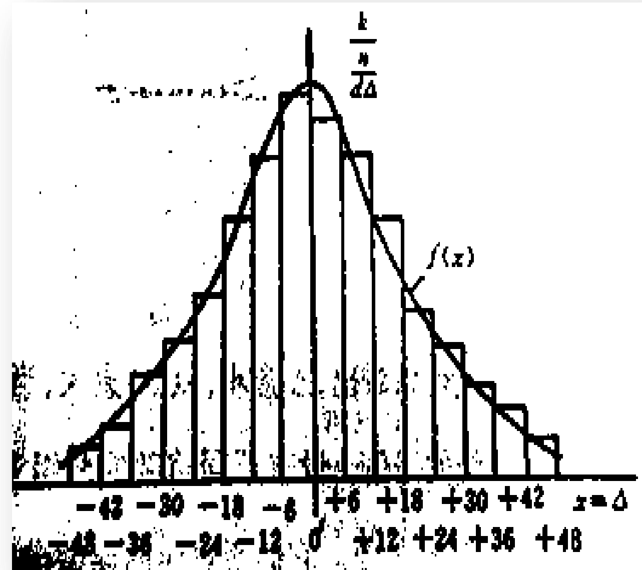
（3）π：圆周率

（4）e：自然底数；

第二节 偶然误差的特性

- 偶然误差正态分布的数学方程：

$$y=f(\Delta)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-\Delta^2}{2\sigma^2}}$$



那么，σ 和 σ^2 是什么？

数学上：***σ 是正态分布的最或然值；***

测绘学：**把*σ^2 称为方差，σ 称为标准差 。***

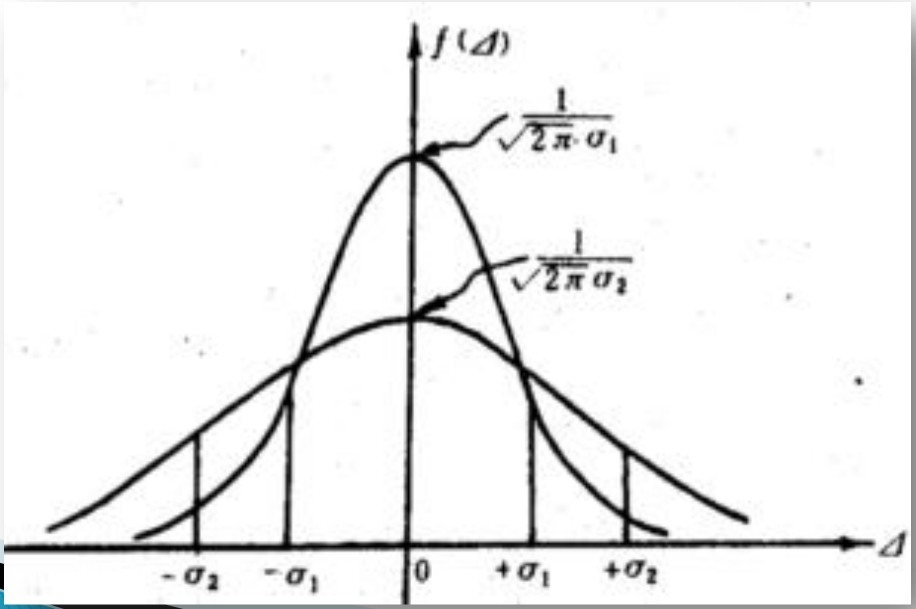
$$\sigma^2=\lim_{n\to\infty}\frac{\Delta_1^2+\Delta_2^2+\cdots+\Delta_n^2}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left[\Delta^2\right]}{n}$$

$$\sigma=\pm\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{\left[\Delta^2\right]}{n}}=\pm\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n}}$$

第二节 偶然误差的特性

方差和标准差有什么作用？

- 当σ 越大，正态分布的曲线越平缓，说明偶然误差分布的越分散；
- 反之，正态分布曲线越突出，说明偶然误差分布的越集中。



第三节 评定精度的指标

现实工作中，观测次数总是有限的。因此，需要有更适合实际测量工作的精度评定指标。

一、中误差（m）

概念：以有限次观测的偶然误差所求得的标准差作为衡量精度的标准，被称作为中误差，用m表示。

中误差计算公式：

$$m=\pm\sqrt{\frac{\Delta_1^2+\Delta_2^2+\cdots+\Delta_n^2}{n}}=\pm\sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n}}$$

第三节 评定精度的指标

例题：某测区图根测量，24个三角形的精度观测值，如下表所示，试计算三角形内角和的中误差。

三角形序号	观测值 ° ′ ″	闭合差 ″	三角形序号	观测值 ° ′ ″	闭合差 ″
1	180 00 05	+5	13	180 00 18	+18
2	179 59 10	-50	14	179 59 56	-4
3	180 00 16	+16	15	179 59 44	-16
4	180 00 00	0	16	180 00 12	+12
5	179 59 50	-10	17	180 00 29	+29
6	180 00 07	+7	18	180 00 06	+6
7	180 00 26	+26	19	179 59 40	-20
8	179 59 58	-2	20	180 00 39	+39
9	179 59 46	-14	21	179 59 43	-17
10	180 00 42	+42	22	179 59 26	-34
11	179 59 55	-5	23	180 00 13	-13
12	179 59 42	-18	24	179 59 36	-24
	Σ	-3		Σ	+2

第三节 评定精度的指标

例题：某测区图根测量，24个三角形的同精度观测值，如下表所示，试计算三角形内角和的中误差。

解：

（1）求每组三角形内角和闭合差的平方

$$\omega_1^2=(+5'')^2=25$$

$$\cdots$$

$$\omega_{24}^2=(-24'')^2=576$$

第三节 评定精度的指标

例题：某测区图根测量，24个三角形的精度观测值，如下表所示，试计算三角形内角和的中误差。

解：

（2）求三角形内角和闭合差的平方和

$$[\omega\omega]=\omega_1^2+\ldots+\omega_{24}^2=25+\ldots+576=11467$$

第三节 评定精度的指标

例题：某测区图根测量，24个三角形的精度观测值，如下表所示，试计算三角形内角和的中误差。

解：

（3）三角形内角和的中误差

$$m_{和} = \pm\sqrt{\frac{[\omega\omega]}{n}} = \pm\sqrt{\frac{11467}{24}} \approx \pm 22''$$

注意：

（1）中误差数值前必须要加±号；

（2）数值后面写“单位”

第三节 评定精度的指标

二、平均误差（θ）

概念：以一组独立偶然误差的绝对值的算术平均值作为衡量精度的标准，称为平均误差，即作为θ 。

平均误差计算公式：

$$\theta = \frac{|\Delta_1| + |\Delta_2| + \cdots + |\Delta_n|}{n} = \frac{[|\Delta|]}{n}$$

第三节 评定精度的指标

例题：某测区图根测量，24个三角形的精度观测值，如下表所示，试计算三角形内角和的平均误差。

三角形序号	观测值 ° ′ ″	闭合差 ″	三角形序号	观测值 ° ′ ″	闭合差 ″
1	180 00 05	+5	13	180 00 18	+18
2	179 59 10	-50	14	179 59 56	-4
3	180 00 16	+16	15	179 59 44	-16
4	180 00 00	0	16	180 00 12	+12
5	179 59 50	-10	17	180 00 29	+29
6	180 00 07	+7	18	180 00 06	+6
7	180 00 26	+26	19	179 59 40	-20
8	179 59 58	-2	20	180 00 39	+39
9	179 59 46	-14	21	179 59 43	-17
10	180 00 42	+42	22	179 59 26	-34
11	179 59 55	-5	23	180 00 13	-13
12	179 59 42	-18	24	179 59 36	-24
	Σ	-3		Σ	+2

第三节 评定精度的指标

例题：某测区图根测量，24个三角形的同精度观测值，如下表所示，试计算三角形内角和的中误差。

解：

（1）求每组三角形内角和闭合差的绝对值

$$|\omega_1| = 5$$

$$|\omega_2| = 50$$

$$\cdots$$

$$|\omega_{24}| = 24$$

第三节 评定精度的指标

例题：某测区图根测量，24个三角形的同精度观测值，如下表所示，试计算三角形内角和的中误差。

解：

（2）求三角形内角和闭合差绝对值之和

$$[|\omega|]=5+50+\ldots+24=427$$

（3）求三角形内角和闭合差平均误差

$$\theta=\frac{[|\omega|]}{n}=\frac{385}{24}\approx 18''$$

第三节 评定精度的指标

三、或然误差（ρ）

概念：将一列偶然误差按绝对值的大小排列，取其居中的一个来作为衡量精度的标准，称为或然误差，用符号ρ表示。

若观测次数为偶数，取其中央两个误差的平均值作为或然误差。

前面例题中，三角形内角和的或然误差ρ为多少？

序号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
闭合差	5	-50	16	0	-10	7	26	-2	-14	42	-5	-18	18	-4	-16	12	29	6	-20	39	-17	-34	-13	-24

序号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
绝对值	0	2	4	5	5	5	6	7	10	12	13	14	16	16	17	18	20	24	26	29	34	39	42	50

第三节 评定精度的指标

四、相对误差（K）

真误差、中误差、平均误差、或然误差都是绝对误差，误差的大小值与本身的数值大小有关，无需参照被观测量的数值。

但是，在一些测量工作中，绝对误差不能表达观测精度的优劣，如距离测量的精度评定。

因此，引入了相对误差的概念，即：中误差的绝对值与被观测量的比值。

相对误差为无纲量，

常把分子化为1表示。

$$K = \frac{|m|}{X} = \frac{1}{\frac{X}{|m|}}$$

第三节 评定精度的指标

五、容许误差（$\Delta_{容}$）

由偶然误差的第一特性可知，在一定观测条件下，偶然误差的绝对值不会超过一定限值。这个限值就是极限误差，或称为容许误差。

大于1倍中误差的真误差出现的概率约为32%，大于两倍中误差的真误差出现的概率约为5%，大于三倍中误差的真误差出现的概率只占3‰左右。

因此在有限次观测的测量中不容许有较大的误差出现，常取两倍或三倍中误差作为偶然误差的容许值，称为容许误差 。

$$|\Delta_{容}| = 2|m|$$

$$|\Delta_{容}| = 3|m|$$

第四节 误差传播定律

在实际工作中有许多未知量不能直接观测而求其值，需要由观测值间接计算出来。

如：某未知点B的高程H_B，是由起始点A的高程H_A加上A点到B点间进行了若干站水准测量而得来的观测高差h_1、h_2、…、h_n求和得出的。

这时未知点B的高程H_B是个独立观测值（诸观测高差h_1、h_2、…、h_n）的函数。

那么如何根据观测值的中误差去求观测值函数的中误差呢？阐述观测值中误差与观测值函数中误差之间关系的定律，称为误差传播定律。

第四节 误差传播定律

一、误差传播定律的一般公式

设有一般函数：

$$Z = F(x_1、x_2、\cdots、x_n)$$

式中，Z 为间接计算的观测值；

x_i 为求解Z的若干独立观测值。

则，通过微分学推到可知，Z的中误差$\boldsymbol{m_z}$：

$$m_Z = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)^2 m_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)^2 m_{x_2}^2 + \cdots + \left(\frac{\partial F}{\partial x_n}\right)^2 m_{x_n}^2}$$

第四节 误差传播定律

二、几种典型函数的中误差

（一）倍数函数的中误差

$$Z = kx$$

则倍数函数的中误差为：$m_Z = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 m_x^2}$

式中：$\frac{\partial F}{\partial x} = k$ 则上式可写成：

$$m_Z = k m_x$$

倍数函数中误差计算例题

- 例：在1:2000比例尺地形图上，量得A、B两点间距离$S_{ab}=25.5\text{mm}$，其中误差$m_{Sab}=\pm 0.2\text{mm}$
- 求，A、B间的实地距离$\boldsymbol{S_{AB}}$及其中误差m_{SAB}。

解：（1）AB实地距离

$$S_{AB}=2000\times S_{ab}=2000\times 25.5=51000\text{mm}=51\text{m}$$

（2）由倍数函数中误差公式得

$$m_{SAB}=2000\times m_{Sab}=2000\times(\pm 0.2)=\pm 400\text{mm}=\pm 0.4\text{m}$$

$$\therefore S_{AB}=51\text{m}\pm 0.4\text{m}$$

第四节 误差传播定律

二、几种典型函数的中误差

（二）和或差函数的中误差

1.基本型公式

$$Z = x \pm y$$

则中误差为：$m_Z = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 m_x^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 m_y^2}$

式中：$\frac{\partial F}{\partial x} = 1$ $\frac{\partial F}{\partial y} = 1$ 则上式可写成：

$$m_Z = \sqrt{m_x^2 + m_y^2}$$

第四节 误差传播定律

二、几种典型函数的中误差

（二）和或差函数的中误差

2.推广型公式

$$Z = x_1 \pm x_2 \pm \cdots \pm x_n$$

则倍数函数的中误差为：

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 1 \qquad m_z = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)^2 m_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)^2 m_{x_2}^2 + \cdots + \left(\frac{\partial F}{\partial x_n}\right)^2 m_{x_n}^2}$$

式中：… 则上式可写成：

$$\frac{\partial F}{\partial x_n} = 1 \qquad m_Z = \sqrt{m_{x_1}^2 + m_{x_2}^2 + \cdots + m_{x_n}^2}$$

第四节 误差传播定律

二、几种典型函数的中误差

（二）和或差函数的中误差

3.同精度观测公式

$$Z = x_1 \pm x_2 \pm \cdots \pm x_n$$

$$m_Z = \sqrt{m_{x_1}^2 + m_{x_2}^2 + \cdots + m_{x_n}^2}$$

若，x_1、x_2、…、x_n为同精度观测值，则：

$$m_{x1} = m_{x2} = \ldots = m_{xn} = m$$

同精度观测函数的中误差为：

$$m_Z = m\sqrt{n}$$

同精度观测函数中误差计算例题

例6-3：以30m长的钢尺丈量90m的距离，当每尺段量距的中误差为±5mm，求全长的中误差。

解：

（1）由同精度观测函数公式，得

$$S_{90}=S_{30}+S_{30}+S_{30}$$

（2）通精度观测函数中误差公式，得

$$m_{S_{90}}=m_{S_{30}}\sqrt{n}=\pm 5\times\sqrt{3}\approx\pm 8.7mm$$

第四节 误差传播定律

二、几种典型函数的中误差

（三）线性函数的中误差

$$Z = k_1 x_1 \pm k_2 x_2 \pm \cdots \pm k_n x_n$$

函数的中误差为：

$$m_Z = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)^2 m_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)^2 m_{x_2}^2 + \cdots + \left(\frac{\partial F}{\partial x_n}\right)^2 m_{x_n}^2}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = k_1$$

式中：$\cdots$

$$\frac{\partial F}{\partial x_n} = k_n$$

则上式可写成：

$$m_Z = \sqrt{k_1^2 m_{x_1}^2 + k_2^2 m_{x_2}^2 + \cdots + k_n^2 m_{x_n}^2}$$

线性函数中误差计算例题

- 例：设有某线性函数为 $Z=\frac{4}{14}x_1+\frac{9}{14}x_2+\frac{1}{14}x_3$

其中x_1、x_2、x_3的中误差分别为m_1＝±3mm、m_2＝±2mm、m_3＝±6mm，求Z的中误差。

解：按误差传播定律，并将x_1、x_2、x_3的中误差代入线性函数中误差公式得

$$m_z=\pm\sqrt{\left(\frac{4}{14}\right)^2 m_{x_1}^2+\left(\frac{9}{14}\right)^2 m_{x_2}^2+\left(\frac{1}{14}\right)^2 m_{x_3}^2}$$

$$m_z=\pm\sqrt{\left(\frac{4}{14}\times 3\right)^2+\left(\frac{9}{14}\times 2\right)^2+\left(\frac{1}{14}\times 6\right)^2}=\pm 1.6\text{mm}$$

第四节 误差传播定律

二、几种典型函数的中误差

（四）一般函数（非线性函数）的中误差

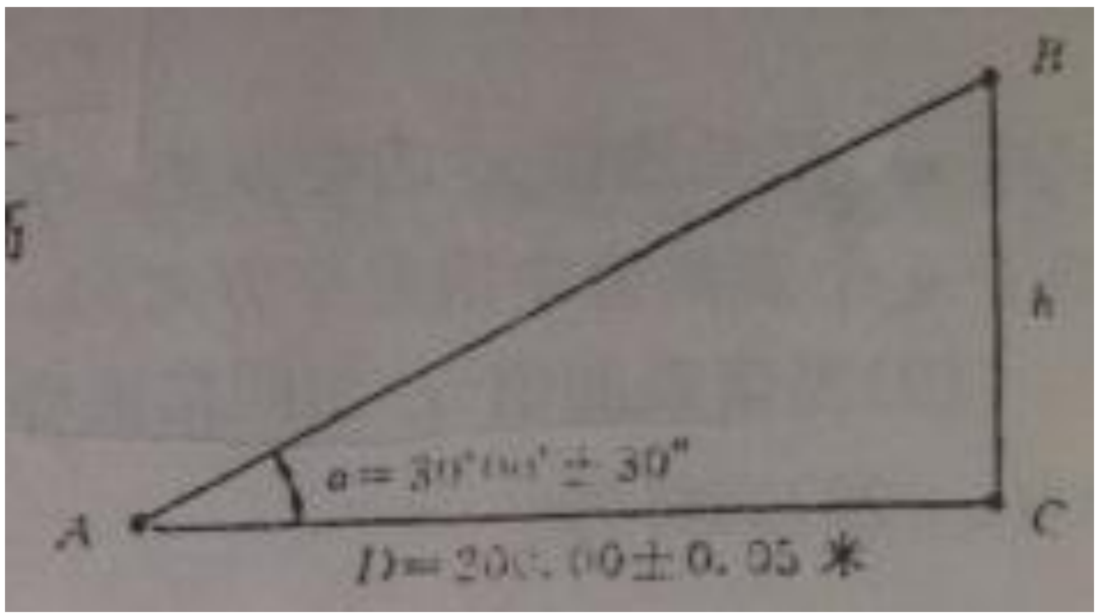
利用误差传播定律的一般公式

$$m_Z = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)^2 m_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)^2 m_{x_2}^2 + \cdots + \left(\frac{\partial F}{\partial x_n}\right)^2 m_{x_n}^2}$$

先求函数F对各自变量的偏导数，再求函数中误差。

一般函数（非线性函数）中误差计算例题

例：如图，测得AB的竖角$\alpha＝30°00'00''\pm30''$，平距AC为$D＝200.00\pm0.05$米，求A、B两点间高差h及其中误差m_h。



一般函数（非线性函数）中误差计算例题

解：（1）求A、B两点之间的高差h

$$h = D\tan\alpha = 200.00 \times \tan 30^\circ = 115.47\text{m}$$

（2）满足一般函数，计算偏导数

$$\frac{\partial h}{\partial D} = \tan\alpha = \tan 30^\circ = 0.577$$

$$\frac{\partial h}{\partial \alpha} = D\sec^2\alpha = 200\left(\sec^2 30^\circ\right) = 266.670$$

（3）求高差h的中误差（ρ =206265″）

$$m_h = \sqrt{\left(\frac{\partial h}{\partial_D}\right)^2 m_D^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial_\alpha}\right)^2 m_\alpha^2}$$

$$m_h = \pm\sqrt{(0.577)^2 \times (0.05)^2 \times (266.670)^2 \times \left(\frac{30}{206265}\right)^2} = \pm 0.048\text{米}$$

第五节 同精度直接平差

- 测量工作中，多余观测起到什么作用？

作用一：为观测成果进行有效的检核；

作用二：获取观测结果的最或然值。

- 测量平差的概念

　　有多余观测的情况下，对包含有偶然误差的观测值进行数据处理的工作。

- 作用：（1）获得观测量的最或然值；（2）评定精度；
- 方法：直接平差、条件平差和间接平差。

第五节 同精度直接平差

一、同精度观测值的最或然值

1.算数平均值原理

设对某未知量进行同精度n次观测，其值为X，观测值分别L_1、L_2、…、L_n，相应的真误差为Δ_1、Δ_2、…、Δ_n。根据真误差公式得：

$$\Delta_i = L_i - X \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

将上式两端分别取和并除以n，得：

$$\frac{[\Delta]}{n} = \frac{[L]}{n} - X$$

第五节 同精度直接平差

- 一、同精度观测值的最或然值

1.算数平均值原理

根据偶然误差的第四个特性（抵偿性），当观测次数$n\to\infty$时，$\dfrac{[\Delta]}{n}$就趋于零，即：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{[\Delta]}{n}=0$

则：

$$\frac{[\Delta]}{n}=\frac{[L]}{n}-X \Rightarrow \frac{[L]}{n}\approx X \Rightarrow x=\frac{[L]}{n}$$

x 被称为算术平均值，它是同精度观测的**最或然值**！

第五节 同精度直接平差

- 一、同精度观测值的最或然值

2.改正数的概念

一个观测量的观测值与真值之差为真误差，算术平均值与观测值之差，称为改正数，记作V。

$$V_i = x - L_i \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

V_i表示某个观测量的第i个改正数
x 被称为算术平均值
L_i表示某个量的第i个观测值

第五节 同精度直接平差

- 二、同精度的精度评定

精度评定包括了：观测值的精度评定和算术平均值的精度评定

1.观测值的精度评定（观测值中误差）

观测值中误差的计算公式为：

$$m=\pm\sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n}}$$

<u>真误差△无法获取，用改正数V代替</u>，经推导得观测值中误差的计算公式为：

$$m=\pm\sqrt{\frac{[VV]}{n-1}}$$

第五节 同精度直接平差

- 二、同精度的精度评定

2.算术平均值的精度评定

算术平均值计算函数为：$x=\frac{[L]}{n}=\frac{1}{n}L_1+\frac{1}{n}L_2+\cdots+\frac{1}{n}L_n$

应用观测值函数中误差计算公式（线性函数误差传播定律公式）得：$m_Z=\sqrt{k_1^2m_{x_1}^2+k_2^2m_{x_2}^2+\cdots+k_n^2m_{x_n}^2}$

$$m_x=\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2m_{L_1}^2+\left(\frac{1}{n}\right)^2m_{L_2}^2+\cdots+\left(\frac{1}{n}\right)^2m_{L_n}^2}$$

因为L_1，L_2，…，L_n为同精度观测值，观测值中误差均为m，则上式简化为

$$m_x=\sqrt{\frac{m^2}{n}}=\frac{m}{\sqrt{n}}$$

第五节 同精度直接平差

- 二、同精度的精度评定

2.算术平均值的精度评定

例题：设对某一水平角**同精度观测了6测回，**观测值列于表中，试计算该水平角的最或然值并评定其精度。

	观测值 ° ′ ″
1	63 22 29
2	63 22 20
3	63 22 22
4	63 22 26
5	63 22 28
6	63 22 24

第五节 同精度直接平差

解：（1）计算水平角观测的最或然值（算术平均值）x

$$x=\frac{[L]}{n}=（L_1+L_2+\ldots+L_6）/ 6= 63° \ 22' \ 25''$$

	观测值 ° ′ ″
1	63 22 29
2	63 22 20
3	63 22 22
4	63 22 26
5	63 22 28
6	63 22 24

第五节 同精度直接平差

解：（2）计算各观测值的改正数V_i

$V_1=(x-L_1)=63°\ 22'25''-63°\ 22'29''=-04''$

$V_2=(x-L_2)=+5''$

$V_3=(x-L_3)=+3''$

$V_4=(x-L_4)=-1''$

$V_5=(x-L_5)=-3''$

$V_6=(x-L_6)=+1''$

	观测值
	° ′ ″
1	63 22 29
2	63 22 20
3	63 22 22
4	63 22 26
5	63 22 28
6	63 22 24

第五节 同精度直接平差

解：（3）计算观测值的中误差m

$$m=\pm\sqrt{\frac{[VV]}{n-1}}=\pm\sqrt{\frac{V_1^2+V_2^2+V_3^2+V_4^2+V_5^2+V_6^2}{n-1}}$$

$$=\pm\sqrt{\frac{(-4)^2+(+5)^2+(+3)^2+(-1)^2+(-3)^2+(+1)^2}{5}}$$

$$=\pm\sqrt{\frac{16+25+9+1+9+1}{5}}=\sqrt{\frac{61}{5}}\approx\pm3.5''$$

观测值中误差说明6测回观测中，每个测回观测值的精度。

第五节 同精度直接平差

解：（3）计算算术平均值的中误差m_x

$$m_x = \pm\frac{m}{\sqrt{n}} = \pm\frac{3.5''}{\sqrt{6}} \approx \pm 1.4''$$

算数平均值中误差代表最终观测结果的精度。

习题：

- **1、用50m钢尺单程丈量了150m的距离，每尺段丈量中误差±5mm，全长的丈量中误差为多少？**

$$L_{150} = L_1 + L_2 + L_3$$

$$m_{150} = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2}$$

$\because L_1$、L_2、L_3为同精度观测

$$\therefore m_1 = m_2 = m_3 = m = \pm 5mm$$

则：$m_{150} = m\sqrt{3} = \pm 5 \times \sqrt{3} \approx \pm 8.7mm$

习题：

- 2、对某直线丈量了6次，观测结果为：246.535m、246.548m、246.520m、246.529m、246.550m、246.537m，求算术平均值、算术平均值中误差及相对误差？

(1)计算算术平均值

$$x=\frac{[L]}{n}=\frac{246.535+246.548+\ldots+246.537}{6}$$

$$=\frac{1479.219}{6}\approx 246.536m$$

习题：

- **2、对某直线丈量了6次，观测结果为：246.535m、246.548m、246.520m、246.529m、246.550m、246.537m，求算术平均值、算术平均值中误差及相对误差？**

(2)计算改正数

$$V_1 = x - L_1 = 246.536 - 246.535 = +0.001m$$

$$V_2 = x - L_2 = 246.536 - 246.548 = -0.012m$$

$$V_3 = x - L_3 = 246.536 - 246.520 = +0.016m$$

$$V_4 = x - L_4 = 246.536 - 246.529 = +0.007m$$

$$V_5 = x - L_5 = 246.536 - 246.550 = -0.014m$$

$$V_6 = x - L_5 = 246.536 - 246.537 = -0.001m$$

习题：

- 2、对某直线丈量了6次，观测结果为：246.535m、246.548m、246.520m、246.529m、246.550m、246.537m，求算术平均值、算术平均值中误差及相对误差？

(3)计算观测值中误差

$$m=\pm\sqrt{\frac{[VV]}{n-1}}$$

$$=\pm\sqrt{\frac{(+1)^2+(-12)^2+(+16)^2+(+7)^2+(-14)^2+(-1)^2}{6-1}}$$

$$=\pm\sqrt{\frac{1+144+256+49+196+1}{5}}=\pm\sqrt{\frac{647}{5}}\approx\pm 11.4mm$$

习题：

- **3、对某个水平角进行同精度的多测回观测，每一个测回的中误差为±6″，试问：若保证观测结果的中误差小于±2″，至少需要几个测回？**

$$m_x = \frac{m}{\sqrt{n}} < \pm 2''$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{\pm 2}{m} = \frac{\pm 2}{\pm 6} = \frac{1}{3}$$

$$\sqrt{n} > 3$$

$$n > 9$$

超级变态计算题！

三角高程测量中，竖盘读数（盘左）60° 00′00″，竖盘读数中误差为±30″，上中下三丝读数分别为1672、1565、1460，十字丝读数中误差为±2mm，仪器高为1.600m，丈量中误差为±5mm。

试问：

（1）水平视距为多少？水平距离的测量中误差？

（2）高差为多少？高差中误差？